

Beweis von Satz 21.1:

-55-

o. E.

$$\left\{ \begin{array}{l} X = Y = \mathbb{R}^n, \\ a \in U, \det f'(a) \neq 0 \end{array} \right\}$$

1. ^{ter} Schritt: " Injektivität von f auf Umg. von a

benutze Lemma 2 : sei $\alpha := \frac{1}{\|f'(a)\|^{-1}}$

und $\varepsilon := \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq (\alpha - \varepsilon) |x_1 - x_2| = \frac{\alpha}{2} |x_1 - x_2|$$

$\forall x_1, x_2 \in B_\delta(a) \Rightarrow \boxed{\Omega := B_\delta(a)}$ ist

eine Umg. von a , so dass $f|_\Omega$ injektiv ist

2. ^{ter} Schritt: " $f(\Omega) =: V$ ist offen "

Bem: stetige Bilder offener Mengen sind i. a.

nicht offen, hier wird also eine neue Eigenschaft

von f bewiesen

Was ist zu zeigen?

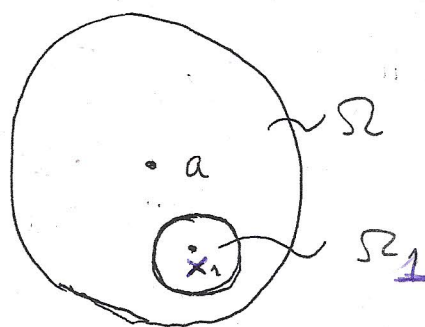
⊛ | fixiere $y_1 := f(x_1) \in V$, $x_1 \in \Omega$, und zeige,
dass eine (kleine) Kugel um y_1 auch zu V gehört

zunächst

Sei $\checkmark$ $B_{\delta_1}(x_1) =: \Omega_1$ mit $\overline{B_{\delta_1}(x_1)} \subset \Omega$

f injektiv $\checkmark \Rightarrow$ auf Ω

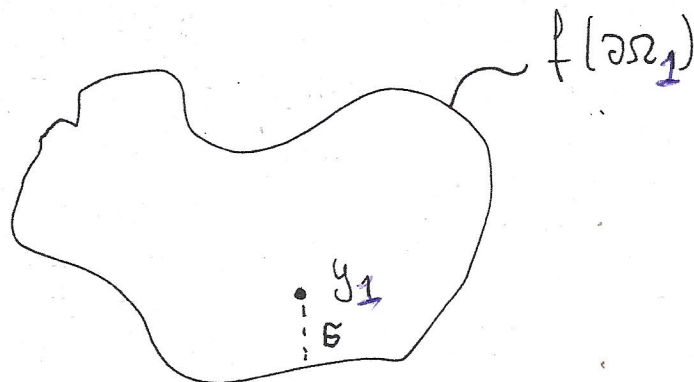
$$y_1 = f(x_1) \notin f(\partial\Omega_1);$$



$\partial\Omega_1$ kompakt, f stetig $\Rightarrow f(\partial\Omega_1)$ kpt.
und damit

$$\epsilon := \text{dist}(y_1, f(\partial\Omega_1)) > 0$$

Beh: $B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y_1) \subset V = f(\Omega)$



genauer zeigen wir:

$$B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y_1) \subset f(\Omega_1)$$

(dann folgt ⊛
von oben)

D.h. : $\left\{ \begin{array}{l} \text{zu } y \in B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y_1) \text{ gibt es ein} \\ x_2 \in \Omega_1 \text{ mit } \varphi(x_2) = y \end{array} \right\}$

Sei also $y \in B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y_1)$ fest. Man setzt

$$\psi(x) := |\varphi(x) - y|^2, \quad x \in \overline{\Omega_1} = \overline{B_{\delta_1}(x_1)}$$

Für $x \in \partial\Omega_1$ ist

$$|\varphi(x) - y| = |\varphi(x) - y_1 + y_1 - y|$$

$$\geq \underbrace{|\varphi(x) - y_1|}_{\geq \epsilon} - \underbrace{|y_1 - y|}_{\leq \frac{1}{2}\epsilon} \geq \frac{1}{2}\epsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi \geq \frac{1}{4}\epsilon^2 \text{ auf } \partial\Omega_1} \quad (1)$$

im Punkt x_1 gilt:

$$\psi(x_1) = |\varphi(x_1) - y|^2 = |y_1 - y|^2 < \frac{1}{4}\epsilon^2 \quad (2)$$

Wegen $y \in B_{\frac{1}{2}\epsilon}(y_1)$

Ψ ist stetig auf dem Kompaktum $\overline{\Omega_1}$,

besitzt also ein Minimum in $x_2 \in \overline{\Omega_1}$;

wegen (1), (2) kann x_2 nicht auf $\partial\Omega_1$ liegen

$$\implies \nabla \Psi(x_2) = 0$$

$$\implies \Psi'(x_2) (y - \Psi(x_2)) = 0 \quad (3)$$

Kettenregel

Vor: $\Psi \in C^1$ (zumindest) und $\det \Psi'(a) \neq 0$

$\implies \Psi'(x)$ regulär nahe a , d.h.

$$\det \Psi'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ nahe } a$$

O.E.

-//-

$$\forall x \in \Omega$$

Dann folgt aus (3): $y = \Psi(x_2)$,

was zu zeigen war.

3^{ter} Schritt: " $g := (\Psi|_{\Omega}) : V \rightarrow \Omega$ ist C^1 "

Sei $y_0 = \Psi(x_0) \in V$, $x_0 \in \Omega$. Wir zeigen

die Diff'barkeit ⁱⁿ x_0 .
von g

-59-

f ist in x_0 diff'bar $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0$

mit

$$\frac{1}{|x - x_0|} \left| f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right| \leq \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{\alpha}{2 \cdot \|f'(x_0)^{-1}\|} \cdot \varepsilon \quad \forall x \in B_r(x_0), x \neq x_0,$$

wobei wir daran erinnern, dass Ω bereits so klein gemacht worden ist, dass $f'(x_0)^{-1}$ existiert;

beachte weiter:

- $f(B_r(x_0))$ ist offen (Begründung wie in Schritt 2,

$\Downarrow$

$\exists R > 0$ mit $B_R(y_0) \subset f(B_r(x_0))$

- $|f(x) - y_0| = |f(x) - f(x_0)| \geq \frac{\alpha}{2} |x - x_0| \quad \forall x \in B_r(x_0)$
(5) gilt ja aus Σ (vgl. Schritt 1)

Für $y = f(x) \in B_R(y_0)$ mit
 $x \in B_r(x_0)$ folgt

$$g(y) - g(y_0) - f'(x_0)^{-1}(y - y_0) =$$

$$x - x_0 - f'(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0)) =$$

$$= f'(x_0)^{-1} \{ f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \} \Rightarrow$$

$$|g(y) - g(y_0) - f'(x_0)^{-1}(y - y_0)| \leq$$

$$\|f'(x_0)^{-1}\| \cdot |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \alpha \cdot \varepsilon \quad |x - x_0| \leq \varepsilon \quad |f(x) - y_0| = \varepsilon \quad |y - y_0|$$

(5)

Also ist g diff'bar in y_0 mit $g'(y_0) = f'(x_0)^{-1}$.

Auf ~~B_R~~ V ist also

$$g' = (f' \circ g)^{-1}$$



hier meint „ -1 “ nicht etwa
die Bildung der Umkehrfunktion
von $y \mapsto f'(g(y))$!

gemeint ist vielmehr:

man invertiere die lineare
Abbildung $f'(g(y))$



genauer gilt also:

$$y \mapsto g'(y) = \left[f'(g(y)) \right]^{-1}$$

(noch zum Beweis von Satz 21.1)

$$f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ sei } C^l, l \geq 1$$

$$\boxed{\det f'(a) \neq 0} \quad (\text{an einer Stelle } a)$$

$g :=$ lokale Inverse zu f bei a

$$(g := (f|_{\Omega})^{-1}, \quad \Omega := \overset{\text{passende}}{\text{Umg. von } a})$$

gezeigt:

1.) $V := f(\Omega)$ offen

2.) g diff'bar auf V mit

$$\boxed{g'(f(x)) = f'(x)^{-1}}$$

$$x \in \Omega$$

bzw.

$$\boxed{g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}, \quad y \in V}$$

Beh: auch g ist C^l

nun beachte:

-64-

- f' und g sind stetig $\implies f' \circ g$ ist stetig
- (Übung) Die Menge $\{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det A \neq 0\}$ ist offen in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und die Inversion

$$I(A) = A^{-1}$$

ist C^∞ auf $\{ \dots : \det A \neq 0 \}$

Wegen $g' = I \circ f' \circ g$ ist g' dann stetig, also $g \in C^1$. Ist $f \in C^2$, so folgt $f' \circ g \in C^1$, also (Formel!) $g' \in C^1$, d.h. $g \in C^2$. Weiter mit Induktion.

□

~~scribble~~

~~scribble~~ $\rightarrow$ p. 60 / Korollar

Korollar (Satz von der offenen Abbildung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ (oder X) offen und

$f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit bijektiv

$f'(x)$ regulär $\forall x \in U$.

Dann ist f eine offene Abbildung

d.h. für offene Mengen $\emptyset \subset U$ ist

auch $f(\emptyset)$ offen.

Ist f zudem injektiv, so ist

$f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ stetig differenzierbar

auf der offenen Menge $f(U)$.
(d.h. folgt aus 1) Teil

Beweis: Die 2^{te} Aussage ist klar, denn

f bildet dann die offene Menge U bijektiv

auf die offene Menge $f(U)$ ab, und wegen
der Voraussetzung an $f'(x)$, $x \in U$, greift
der Umkehrsatz.

1^{te} Aussage: Übungsaufgabe, benutze den
2^{ten} Beweisschritt aus 21.1 □



Also ist $f(B_r(x_0))$ offene Umgebung von y_0 in $f(U)$, also

$f(U)$ offen. Die 2te Aussage ist klar.

□

DEF 21.1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt regulär, wenn

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } f \in C^1(U, \mathbb{R}^n) & \text{ii) } f \text{ injektiv} \\ \text{iii) } \det f'(x) \neq 0 \text{ ist für alle } x \in U. & \end{array} \right. \text{ und}$$

b) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein

Diffeomorphismus von U auf V , wenn f regulär ist mit
 (Diffeomorphismus der Klasse C^1)
Bild $f = V$.

c) „lokal Diffeom“ $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ //

BEM: ① f regulär $\xRightarrow{\text{KOR}}$ $f(U)$ offen, also f Diffeom.
von U auf $f(U)$.

② f regulär $\xRightarrow{\text{Satz 21.1}}$ f^{-1} regulär

③ wir haben gesehen:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(U, \mathbb{R}^n), \det f'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U \implies \\ \text{jeder Punkt } x \text{ hat eine Umgebung, auf der } f \text{ injektiv ist} \\ \text{ („lokale Injektivität“)} \end{array} \right.$$

Das reicht natürlich nicht, um auf Injektivität zu schließen!

(d.h. f muß nicht regulär sein!)

Beispiel: $f(x, y) = e^x (\cos y, \sin y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(Bild $f = ?$)

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\det f'(x, y) = e^{2x} > 0 \quad \text{überall}$$

Dagegen ist

$$f(x, y + 2\pi) = f(x, y),$$

also f nicht (global) injektiv. $\square$

$\rightarrow$ Übungen: Beispiele!

Implizite Funktionen (und nichtlineare Gleichungssysteme)

Situation :

$$\left\{ \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{mit } \boxed{m < n} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ sei gegeben; wie sieht} \\ \text{die } \underline{\text{Lösungsmenge}} \text{ von} \\ \boxed{f(x) = y_0} \text{ aus?} \end{array} \right.$$

Beispiele :

i) linearer Fall :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by$$

(mit $a, b \in \mathbb{R}$)

gesucht: die Nullstellenmenge von f ,

$$N_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Fall 1: $a = b = 0 \implies f = 0 \implies$

$$N_f = \mathbb{R}^2$$

Fall 2: o. E. $b \neq 0$

$$(x, y) \in N_f \iff y = -\frac{a}{b}x$$

Also: $N_f = \text{Graph von } x \mapsto -\frac{a}{b}x.$

beachte: $b = \frac{\partial f}{\partial y}$

Folgerung: // Ableitung nach $y \neq 0$ -68-

$\Rightarrow$ man kann N_f nach y
auflösen, also $y = y(x)$
//
schreiben

(entsprechend: $\frac{\partial f}{\partial x} = a \neq 0 \Rightarrow$

$x = -\frac{b}{a} y$ ist die Auflösung
nach x , $N_f = \left\{ \left(-\frac{b}{a} y, y \right) : y \in \mathbb{R} \right\}.$

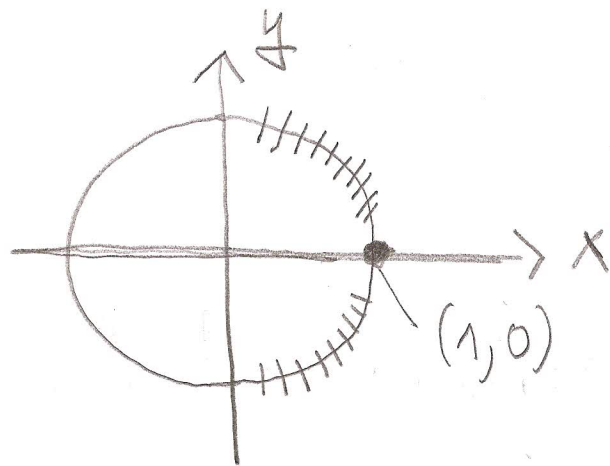
ii) Sei $\boxed{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2}$

Struktur von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$?

Offensichtlich gilt:

$$f(x, y) = 1 \iff$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{1 - y^2} \\ \text{bzw.} \\ y = \pm \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$



Lösungsmenge
geometrisch =

Kreislinie um $(0,0)$
 mit Radius 1

$(1,0) \in \underline{\text{Lösungsmenge}}$, aber in der Nähe
 von $(1,0)$ kann man nicht nach y auflösen:

L ist lokal bei $(1,0)$ kein Graph über
 der x -Achse. Die lokale Auflösung
nach x ist möglich, d.h.

schraffiertes Stück von $L =$

$$\{ (\sqrt{1-y^2}, y) : -1 \leq y \leq 1 \}$$

Beobachtung: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0,$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

Vermutung (allgemeiner):

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad N_f := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{f(x,y)}_{=0} \right\}$$

$$(x_0, y_0) \in N_f$$

• $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \implies N_f \text{ lokal Graph über } \underline{\underline{x\text{-Achse}}}$

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \implies \dots \underline{\underline{y\text{-Achse}}}$